ISSN 0021-7824
JMPAAM

TOME 63 FASCICULE 2 1984
NEUVIÈME SÉRIE

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

gauthier-villars

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

SOMMAIRE DU FASCICULE N° 2

La Revue figure dans *Current Contents*

2192-84 – IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS – France – octobre 1984
Dépôt légal 1984 : Imprimeur : 2634 – Éditeur : 012 – CPPP 58147

Le Directeur de la publication : JEAN-MANUEL BOURGOIS

Imprimé en France

J. Math. pures et appl.,
63, 1984, p. 187 à 213.

GRANDES VALEURS DE LA FONCTION SOMME DES DIVISEURS ET HYPOTHÈSE DE RIEMANN

G. ROBIN

RÉSUMÉ. — Soit σ la fonction $\sigma(n)=\sum_{d \mid n} d$. Le but de cet article est de prouver que si l'hypothèse de Riemann est vraie, on a $\sigma(n)<e^{\gamma} n \log \log n$ pour $n \geqq 5041$. (γ est la constante d'Euler). Si l'hypothèse de Riemann est fausse, on montre aussi qu'il existe une infinité de n tels que $\sigma(n)>e^{\gamma} n \log \log n$ et $\forall n \geqq 3$, $\sigma(n)<e^{\gamma} n \log \log n+0{,}6483\, n/\log \log n$.

ABSTRACT. — Let be the function $\sigma(n)=\sum_{d \mid n} d$. The aim of this paper is to prove that under Riemann's hypothesis, $\sigma(n)<e^{\gamma} n \log \log n$ for $n \geqq 5041$. (γ is Euler's constant). If Riemann's hypothesis is false it is shown that for infinitely many n, $\sigma(n)>e^{\gamma} n \log \log n$ and $\forall n \geqq 3$, $\sigma(n)<e^{\gamma} n \log \log n+0{,}6483\, n/\log \log n$.

1. Introduction

Désignons par $\sigma(n)$ la somme des diviseurs de l'entier n; c'est une fonction multiplicative et l'on a :

$$\sigma(p^{\alpha})=(p^{\alpha+1}-1)/(p-1)$$

pour p premier et $\alpha \geqq 1$.

Si $\varphi(n)$ désigne l'indicateur d'Euler, il est bien connu que :

$$\frac{\sigma(n)}{n}<\frac{n}{\varphi(n)}$$

pour tout $n \geqq 1$ et que :

$$\overline{\lim} \frac{n}{\varphi(n) \log \log n}=\overline{\lim} \frac{\sigma(n)}{n \log \log n}=e^{\gamma}$$

γ étant la constante d'Euler ([GRO] et [HAR, p. 266]); $\gamma=0{,}577215\ldots$, $e^{\gamma}=1{,}78107\ldots$

J. L. Nicolas [NIC 2] a récemment démontré qu'il existe une infinité de nombres n tels que :

$$\frac{n}{\varphi(n) \log \log n}>e^{\gamma},$$

répondant ainsi à une question de J. B. Rosser et L. Schoenfeld ([ROS 1], p. 72). On peut donc se demander s'il existe une infinité de n tels que :

$$f(n)=\frac{\sigma(n)}{n\log\log n}>e^\gamma$$

Nous allons démontrer :

THÉORÈME 1. — *L'hypothèse de Riemann (HR) est équivalente à :*

$$(1)\qquad \forall n \geqq 5041,\qquad \sigma(n)<e^\gamma n\log\log n.$$

Pour la fonction $n\mapsto n/\varphi(n)$ les grandes valeurs sont obtenues pour les nombres $n=\mathrm{N}_k=\prod_{i=1}^{k} p_i$ où p_i désigne le $i$ième nombre premier. Pour la fonction $n\mapsto\sigma(n)/n$, il convient de remplacer ces nombres N_k par les nombres colossalement abondants $(\mathrm{C}_k)_{k\geqq 1}$. Ces nombres ont été introduits par L. Alaoglu et P. Erdös ([ALA]) à la suite de S. Ramanujan qui, pour étudier les grandes valeurs de la fonction $d(n)=\sum_{d\mid n} 1$, avait défini les nombres hautement composés supérieurs ([RAM], § 32).

La définition et les propriétés des nombres colossalement abondants sont indiquées au paragraphe 2.

L'implication (HR) $\Rightarrow$ (1), étudiée au paragraphe 3, repose d'abord sur la proposition 1 qui nous autorise à ne considérer que les valeurs de $f(\mathrm{C}_k)$ où C_k est colossalement abondant. Pour C_k assez grand ($k\geqq 3000$), la majoration de $f(k)$ se fait en évaluant les produits $\prod_{p\leqq x}(1-1/p)$ et $\prod_{p\geqq x}(1-(1/p^2)$. Elle suit celle de [NIC 2] mais elle doit être plus fine. Pour les petites valeurs de C_k des calculs sur ordinateurs permettent de conclure.

L'implication, « si HR n'est pas vraie alors il existe une infinité de nombres n tels que $f(n)>e^\gamma$ », est précisée par la proposition 1 du paragraphe 4 et par le théorème suivant :

THÉORÈME 2. — *Pour :*

$$n\geqq 3,\qquad \frac{\sigma(n)}{n}\leqq e^\gamma\log\log n+\frac{0{,}6482\ldots}{\log\log n},$$

avec égalité pour $n=12$.

D'autres précisions sur le comportement asymptotique de $f(n)$ sont données dans [ROB 4].

Tous les calculs utilisent les résultats — et parfois les démonstrations — de J. B. Rosser et L. Schoenfeld ([ROS 1], [ROS 2], [SCH]). Inversement, notre technique du paragraphe 3, nous permet d'améliorer sensiblement les résultats de ([SCH], p. 340). On prouve ainsi au paragraphe 5 :

THÉORÈME 3. — *Sous l'hypothèse de Riemann :*

$$(a)\qquad \sum_{p\leqq x}\frac{1}{p}-\log\log x-\mathrm{B}_1>-\frac{\log x}{8\pi\sqrt{x}},\qquad \forall x>1$$

(b) $$\sum_{p\leq x}\frac{1}{p}-\log\log x-B_1<\frac{\log x}{8\pi\sqrt{x}},\qquad \forall x>318{,}06,$$

(c) $$e^{\gamma}\prod_{p\leq x}\left(1-\frac{1}{p}\right)\log x-1<\frac{\log x}{8\pi\sqrt{x}}\qquad \forall x>1,$$

(d) $$e^{\gamma}\prod_{p\leq x}\left(1-\frac{1}{p}\right)\log x-1>-\frac{\log x}{8\pi\sqrt{x}}\ \forall x\geqq 317{,}48,$$

$$B_1=0{,}2641\ldots$$

A la place de $\log x$ dans les membres de droite, Schoenfeld avait $3\log x+4$ dans (a) et (b) et $3\log x+5$ dans (c) et (d).

Au dernier paragraphe nous montrons comment la technique des nombres colossalement abondants s'appliquent à des fonctions voisines. On améliore ainsi des résultats de A. IVIČ [IVI] sur la fonction $\sigma^*(n)=\sum_{\substack{d\mid n\\(d,\,n/d)=1}} d$, somme des diviseurs unitaires.

Je tiens à remercier vivement J. L. Nicolas qui m'a fourni le thème de l'étude et qui m'a aidé pendant toute sa réalisation.

2. Les nombres colossalement abondants

Les nombres colossalement abondants ont été définis par L. Alaoglu et P. Erdös dans [ALA] et étudiés par P. Erdös et J. L. Nicolas dans [ERD] et [NIC 1].

DÉFINITION. — N *est colossalement abondant, s'il existe* $\varepsilon>0$ *tel que :*

$$\forall n\geqq 1,\qquad \frac{\sigma(n)}{n^{\varepsilon+1}}\leqq\frac{\sigma(N)}{N^{\varepsilon+1}}$$

Pour x réel positif et α entier $\geqq 1$ on définit :

$$F(x,\alpha)=\log(1+1/(x+x^2+\ldots+x^{\alpha}))/\log x$$

Pour α fixé, la fonction $x\mapsto F(x,\alpha)$ est décroissante dans $]1,\infty[$.

On pose :

$$E_p=\{F(p,\alpha);\ \alpha\geqq 1\}\text{ pour } p \text{ premier},$$

$$E=\bigcup_{p\text{ premier}} E_p=\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_i,\ldots\},$$

avec $\varepsilon_i>\varepsilon_{i+1}$ pour $i\geqq 1$.

Pour $\varepsilon>0$, on définit x_k, pour $k\geqq 1$, par $F(x_k,k)=\varepsilon$ et l'on pose $x=x_1$.

La proposition suivante ([ERD], p. 70), qui utilise le théorème des six exponentielles de LANG ([LAN], p. 8), précise la structure des nombres colossalement abondants.

PROPOSITION. — *(a) Si* $\varepsilon \notin E$, *la fonction* $\sigma(n)/n^{1+\varepsilon}$ *atteint son maximum en un seul point* N_ε *dont la décomposition en facteurs premiers est :*

$$N_\varepsilon = \Pi_p\, p^{\alpha_p(\varepsilon)} \qquad avec \quad \alpha_p(\varepsilon) = \left[\frac{\log((p^{1+\varepsilon}-1)/(p^\varepsilon-1))}{\log p}\right] - 1$$

où, si l'on préfère :

$$\begin{cases} \alpha_p(\varepsilon) = k & si \quad x_{k+1} < p < x_k \quad avec \quad k \geqq 1 \\ \quad et & \alpha_p(\varepsilon) = 0 \quad si \quad p > x = x_1, \end{cases}$$

(b) soit $i \geqq 1$; *pour tout* $\varepsilon \in]\varepsilon_{i-1}, \varepsilon_i[$, N_ε *est constant et égal (par définition) à* N_i. *Les nombres* N_i *sont tous distincts.*

(c) Si les ensembles E_p *sont disjoints deux à deux, l'ensemble des nombres colossalement abondants est égal à l'ensemble des nombres* N_i, $1 \leqq i$; *la fonction* $\sigma(n)/n^{1+\varepsilon_i}$ *atteint son maximum aux deux points* N_i *et* N_{i+1}.

(d) Si les ensembles E_p *ne sont pas disjoints, pour chaque* $\varepsilon_i \varepsilon E_q \cap E_r$, *la fonction* $\sigma(n)/n^{1+\varepsilon_i}$ *atteint son maximum en quatre points :* N_i, qN_i, rN_i *et* $N_{i+1} = qrN_i$. *Les nombres* qN_i *et* rN_i *sont colossalement abondants.*

On a, pour k fixé, $x_k \sim \sqrt[k]{kx}$ lorsque $\varepsilon \to 0$ et d'après ([ERD], p. 74) :

$$x_2 = \sqrt{2x}\left(1 - \frac{\log 2}{2\log x} + 0\left(\frac{1}{(\log x)^2}\right)\right).$$

Nous aurons besoin du résultat plus précis suivant :

LEMME

(a) $$x_k > x^{1/k}, \qquad \forall x > 1, \qquad \forall k \geqq 2,$$

(b) $$x_2 < \sqrt{2x}, \qquad \forall x > 1,$$

(c) $$x_2 > \sqrt{2x}\left(1 - \frac{\log 2}{2\log x}\right) \qquad \text{pour} \quad x \geqq 1\,530.$$

Démonstration. — (a) Si l'on pose $t = x^{1/k}$, il faut montrer que :

$$(k\log(1+1/(t+t^2+\ldots+t^k)) - \log(1+1/t^k))/\log x > 0,$$

soit :

$$\left(1 + \frac{1}{t+t^2+\ldots+t^k}\right)^k > 1 + \frac{1}{t^k}.$$

Comme $(1+u)^k > 1+ku$ il vient :

$$\left(1 + \frac{1}{t+t^2+\ldots+t^k}\right)^k > 1 + \frac{k}{t+\ldots+t^k} > 1 + \frac{1}{t^k}$$

(*b*) On doit montrer que :

$$A=\frac{2\log(1+(1/(2x+\sqrt{2x}))}{\log x+\log 2}-\frac{\log(1+1/x)}{\log x}<0$$

Or :

$$2\log\left(1+\frac{1}{2x+\sqrt{2x}}\right)-\log\left(1+\frac{1}{x}\right)<0,$$

puisque l'on vérifie que :

$$\left(1+\frac{1}{2x+\sqrt{2x}}\right)^2\leqq 1+\frac{1}{x}\quad\text{pour tout}\quad x>0,$$

d'où $A<0$.

(*c*) Si l'on pose $z=\sqrt{2x}(1-u/2)$ avec $u=\log 2/\log x$ il faut montrer que :

$$\log(1+1/(z+z^2))/\log z>\log(1+1/x)/\log x.$$

En utilisant l'encadrement $1/(a+1)\leqq\log(1+(1/a)<1/a$, il suffit de vérifier que :

$$\frac{1}{1+z+z^2}>\frac{1}{x\log x}\log\left(\sqrt{2x}\left(1-\frac{u}{2}\right)\right),$$

ou :

$$\frac{1}{1+z+z^2}>\frac{1}{2x}\left(1+u-\frac{u^2}{\log 2}\right)$$

ou $(*)$:

$$(1+z+z^2)\left(1+u-\frac{u^2}{\log 2}\right)<2x.$$

Or :

$$z^2\left(1+u-\frac{u^2}{\log 2}\right)=2x\left(1-\frac{u}{2}\right)^2\left(1+u-\frac{u^2}{\log 2}\right)$$

$$\leqq 2x\left(1-u^2\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{\log 2}\right)+u^3\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{\log 2}\right)\right).$$

Par suite si $x\geqq 2^{11}$, $u<1/11$ *et* :

$$z^2\left(1+u-\frac{u^2}{\log 2}\right)\leqq 2x(1-2{,}03\,u^2).$$

D'autre part :

$$(1+z)\left(1+u-\frac{u^2}{\log 2}\right)\leqq\sqrt{2x}\left(1+\frac{u}{2}\right)+1+u\leqq 1{,}07\sqrt{2x}.$$

Par suite ($*$) est vérifiée pour $x\geqq 2^{11}$ puisque l'on constate que :

$$1{,}07\sqrt{2x}\leqq 4{,}06\,x\left(\frac{\log 2}{\log x}\right)^2.$$

Une vérification à l'ordinateur pour $x<2^{11}$ montre que :

$$x_2\geqq\sqrt{2x}\left(1-\frac{\log 2}{2\log x}\right)\qquad\text{pour}\quad x>1\,529{,}14\ldots\qquad\text{et}\qquad x\leqq 6,\ldots$$

3. Comportement de $\sigma(n)$ si l'hypothèse de Riemann est vraie

Dans tout ce paragraphe nous supposons que l'hypothèse de Riemann est vraie.

La proposition suivante permet de s'intéresser aux seuls nombres colossalement abondants pour la démonstration du théorème 1.

PROPOSITION 1. — *Soit* $3\leqq N\leqq n\leqq N'$, N *et* N′ *étant deux nombres colossalement abondants successifs. Alors :*

$$f(n)\leqq \operatorname{Max}(f(N), f(N')).$$

Démonstration. — Si N et N′ sont colossalement abondants successifs il existe une seule valeur ε du paramètre pour laquelle on a :

$$\forall n\geqq 1,\qquad \frac{\sigma(n)}{n^{\varepsilon+1}}\leqq\frac{\sigma(N)}{N^{\varepsilon+1}}=\frac{\sigma(N')}{N'^{\varepsilon+1}}.$$

Par suite :

$$f(n)\leqq f(N)\times\left(\frac{n}{N}\right)^{\varepsilon}\frac{\log\log N}{\log\log n}$$

et l'on aura :

$$f(n)\leqq f(N)\qquad\text{si}\quad \frac{n^{\varepsilon}}{\log\log n}\leqq\frac{N^{\varepsilon}}{\log\log N}.$$

La proposition sera démontrée si :

$$\varepsilon\log n-\log\log\log n\leqq\operatorname{Max}(\varepsilon\log N-\log\log\log N,\ \varepsilon\log N'-\log\log\log N')$$

or ceci est une conséquence de la convexité de la fonction :

$$x\to\varepsilon x-\log\log x\qquad(x>1).$$

PROPOSITION 2. — *Sous l'hypothèse de Riemann, il existe n_0 tel que $f(n) < e^\gamma$ pour $n \geqq n_0$.*

Démonstration. — Soit N colossalement abondant pour ε; on a :

$$\frac{\sigma(\mathrm{N})}{\mathrm{N}} = \prod_{x_2 < p \leqq x} \left(1+\frac{1}{p}\right) \prod_{x_3 < p \leqq x_2} \left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}\right) \times \ldots,$$

les x_i étant définis au paragraphe 1.

D'où :

$$\frac{\sigma(\mathrm{N})}{\mathrm{N}} \leqq \prod_{x_2 < p \leqq x} \left(1-\frac{1}{p^2}\right) \Big/ \prod_{p \leqq x} \left(1-\frac{1}{p}\right) \leqq \prod_{\sqrt{2x} < p \leqq x} \left(1-\frac{1}{p^2}\right) \Big/ \prod_{p \leqq x} \left(1-\frac{1}{p}\right)$$

d'après le lemme du paragraphe 2.

Compte tenu de ce que :

$$\sum_{p \geqq x} \frac{1}{p^2} = \frac{1}{x \log x} + 0\left(\frac{1}{x \log^2 x}\right),$$

on a :

$$\prod_{\sqrt{2x} < p \leqq x} \left(1-\frac{1}{p^2}\right) = \exp\left(-\sum_{\sqrt{2x} < p \leqq x} \frac{1}{p^2} + 0\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)\right)$$

$$= \exp\left(\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{x} \log x} + 0\left(\frac{1}{\sqrt{x} \log^2 x}\right)\right).$$

On a aussi, d'après la proposition du paragraphe 2 :

$$\log \mathrm{N} = \theta(x) + \theta(x_2) + 0(x_3) = \theta(x)\left(1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}} + 0\left(\frac{1}{\sqrt{x} \log x}\right)\right),$$

où $\theta(x) = \sum_{p \leqq x} \log p$ désigne la première fonction de Tchebycheff.

Par suite :

$$\log \log \mathrm{N} = \log \theta(x) \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x} \log x} + 0\left(\frac{1}{\sqrt{x} \log^2 x}\right)\right).$$

D'après [NIC 2] (*voir* plus loin pour une démonstration)

$$\prod_{p \leqq x} \left(1-\frac{1}{p}\right) \geqq \frac{e^{-\gamma}}{\log \theta(x)} \exp\left(\frac{-(2+c)}{\sqrt{x} \log x} + 0\left(\frac{1}{\sqrt{x} \log^2 x}\right)\right),$$

où $c=\sum_{\rho}\frac{1}{|\rho|^2}$, la somme étant étendue aux zéros non triviaux de la fonction ζ de Riemann.

$$c=\gamma+2-\log 4\pi=0{,}046\,19\ldots \quad ([\text{EDW}], \text{ p. } 67])$$

Finalement :

$$f(\mathrm{N})\leqq e^{\gamma}\exp\left(\frac{2+c-2\sqrt{2}}{\sqrt{x}\log x}+0\left(\frac{1}{\sqrt{x}\log^2 x}\right)\right).$$

Comme $2+c-2\sqrt{2}=-0{,}782\ldots$ il s'ensuit que $f(\mathrm{N})\leqq e^{\gamma}$ pour N assez grand.

Démontrer le théorème 1 revient à expliciter toutes les constantes. Nous aurons besoin pour cela des résultats suivants de Rosser et Schoenfeld sur les fonctions de Tchebycheff $\theta(x)$ et $\psi(x)=\sum_{p^m\leqq x}\log p$.

(1) $$\psi(x)-\theta(x)>\sqrt{x},\quad 121<x\leqq 10^{16}\quad ([\text{ROS } 1], \text{ p. } 73),$$

(2) $$\psi(x)-\theta(x)\leqq\theta(x^{1/2})+3x^{1/3},\qquad x>0\quad ([\text{ROS } 1], \text{ p. } 71),$$

(3) $$\theta(x)<1{,}000\,081\,x,\qquad x>0\quad ([\text{SCH}], \text{ p. } 360),$$

(4) $$\theta(x)\leqq x,\qquad x<10^{11}\ ([\text{SCH}], \text{ p. } 360),$$

(5) $$\theta(x)>x-\frac{1}{8}\frac{x}{\log x},\qquad x\geqq 19\,421\ ([\text{SCH}], \text{ p. } 359)$$

et si l'hypothèse de Riemann est vraie :

(6) $$|\theta(x)-x|\leqq\frac{1}{8\pi}\sqrt{x}\log^2 x,\qquad x\geqq 599\quad ([\text{SCH}], \text{ p. } 337),$$

(7) $$\psi(x)-x\leqq\frac{1}{8\pi}\sqrt{x}\log^2 x,\qquad x>74\quad ([\text{SCH}], \text{ p. } 337).$$

Minoration de $\prod_{p\leqq x}(1-(1/p))$. — Posons $\theta(x)=x+\mathrm{S}(x)$ et $\psi(x)=x+\mathrm{R}(x)$. On a alors :

$$\sum_{p\leqq x}\frac{1}{p}=\int_{2^-}^{x}\frac{d\theta(t)}{t\log t}=\int_{2}^{x}\frac{dt}{t\log t}+\int_{2^-}^{x}\frac{d\mathrm{S}(t)}{t\log t},$$

soit :

$$\sum_{p\leqq x}\frac{1}{p}=\log\log x-\log\log 2+\frac{\mathrm{S}(x)}{x\log x}+\frac{1}{\log 2}+\int_{2}^{x}\frac{\mathrm{S}(t)(\log t+1)}{(t\log t)^2}dt.$$

Posons :

$$\mathrm{B}_1=\frac{1}{\log 2}-\log\log 2+\int_{2}^{x}\mathrm{S}(t)\frac{\log t+1}{(t\log t)^2}dt=0{,}264\,1\ldots$$

([HAR], p. 351]) d'après la comparaison avec le développement asymptotique usuel. On peut écrire alors :

$$\sum_{p\leq x}\frac{1}{p}=\log\log x+\mathrm{B}_1+\frac{\mathrm{S}(x)}{x\log x}-\int_x^\infty\frac{\mathrm{S}(t)(\log t+1)}{(t\log t)^2}dt, \tag{8}$$

ou encore :

$$\sum_{p\leq x}\frac{1}{p}=\log\log\theta(x)+\mathrm{B}_1 \tag{9}$$

$$+\left(\log\log x-\log\log\theta(x)+\frac{\mathrm{S}(x)}{x\log x}\right)-\int_x^\infty\frac{\mathrm{S}(t)(\log t+1)}{(t\log t)^2}dt$$

et l'on étudiera $\prod_{p\leq x}(1-(1/p))$ à partir de :

$$\sum_{p\leq x}\log\left(1-\frac{1}{p}\right)=\mathrm{B}_1-\gamma-\sum_{p\leq x}\frac{1}{p}-\sum_{p>x}\left(\log\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{p}\right). \tag{10}$$

Nous allons estimer :

$$\mathrm{L}_1(x)=\int_x^\infty\frac{\mathrm{S}(t)(\log t+1)}{(t\log t)^2}dt=\mathrm{J}_1(x)-\mathrm{K}_1(x),$$

avec :

$$\mathrm{J}_1(x)=\int_x^\infty\frac{\mathrm{R}(t)(\log t+1)}{(t\log t)^2}dt,$$

et

$$\mathrm{K}_1(x)=\int_x^\infty\frac{(\psi(t)-\theta(t))(\log t+1)}{t^2\log^2 t}dt.$$

Les deux lemmes qui suivent seront utilisés avec $n=1$ dans la présente minoration et avec $n=2$ dans la majoration de $\prod_{x_2<p\leq x}(1-(1/p^2))$.

Lemme 1. — *Soit :*

$$\mathrm{F}_{\rho,n}=\int_x^\infty\frac{t^\rho}{t^{n+1}}\frac{n\log t+1}{\log^2 t}dt$$

pour $n\in\mathbb{N}^*$ *et* $\rho\in\mathbb{C}$ *alors :*

$$\mathrm{F}_{\rho,n}=\frac{n}{n-\rho}\frac{x^{\rho-n}}{\log n}+r_{\rho,n},$$

avec :

$$r_{\rho,n}=\frac{\rho}{(\rho-n)^2}\left(-\frac{x^{\rho-n}}{\log^2 x}+2\int_x^\infty\frac{t^{\rho-n-1}}{(\log t)^3}dt\right).$$

Si $\mathrm{R}\,e(\rho)=1/2$ *alors :*

$$|r_{\rho,\,n}| \leqq \frac{1}{|\rho|}\,\frac{1}{x^{n-1/2}\log^2 x}\left(1+\frac{4}{(2n-1)\log x}\right).$$

Démonstration. — On intègre deux fois par parties.

LEMME 2. — *Si :*

$$\mathrm{J}_n(x)=\int_x^{\infty}\mathrm{R}(t)\frac{n\log t+1}{t^{n+1}\log t}dt,$$

on a pour $x \geqq 2$, *avec :*

$$c=\sum_{\rho}\frac{1}{|\rho|^2}=0{,}046\,19,$$

ρ *décrivant l'ensemble des zéros de la fonction* ζ *de Riemann :*

$$-\frac{c}{x^{n-1/2}\log x}\left(n+\frac{1}{\log x}+\frac{4}{(2n-1)\log^2 x}+\frac{\log 2\pi}{c\sqrt{x}}\right)$$

$$\leqq \mathrm{J}_n(x) \leqq \frac{c}{x^{n-1/2}\log x}\left(n+\frac{1}{\log x}+\frac{4}{(2n-1)\log^2 x}\right).$$

Démonstration. — On utilise la formule explicite de la théorie des nombres sous la forme suivante ([ELL], th. 5.8, p. 169) :

$$\int_x^{\infty} g(t)\left\{\psi(t)-t+\log 2\pi+\frac{1}{2}\log\left(1-\frac{1}{t^2}\right)\right\}dt=-\sum_{\rho}\int_x^{\infty}\frac{g(t)\,t^{\rho}}{\rho}dt$$

avec :

$$g(t)=\frac{n(\log t+1)}{t^{n+1}\log^2 t} \quad \text{on a } |g'(t)|=0\left(\frac{1}{t^3\log t}\right),$$

puisque $n \geqq 1$, ce qui permet de prendre la borne infinie dans l'intégrale, d'après le théorème de la convergence dominée.

Posons :

$$\mathrm{J}_n(x)=\mathrm{J}_n^{(1)}(x)+\mathrm{J}_n^{(2)}(x)$$

avec :

$$\mathrm{J}_n^{(1)}(x)=-\sum_{\rho}\int_x^{\infty}\frac{t^{\rho}}{\rho}\,\frac{n\log t+1}{t^{n+1}\log^2 t}dt,$$

$$\mathrm{J}_n^{(2)}(x)=-\int_x^{\infty}\left(\log 2\pi+\frac{1}{2}\log\left(1-\frac{1}{t^2}\right)\right)\frac{n\log t+1}{t^{n+1}\log^2 t}dt.$$

Pour $t \geqq x \geqq 2$ on a :

$$0 < -\frac{1}{2}\log\left(1-\frac{1}{t^2}\right) < \log 2\pi.$$

Donc :

$$-\frac{\log 2\pi}{x^n \log x} < J_n^{(2)}(x) < 0.$$

D'après le Lemme 1 :

$$J_n^{(1)}(x) = \sum_\rho \frac{n}{\rho(\rho-n)} \frac{x^{\rho-n}}{\log x} - \sum_\rho \frac{r_\rho(x)}{\rho}$$

soit :

$$J_n^{(1)}(x) = \frac{n}{x^{n-1/2}\log x} \sum_\rho \frac{x^{i \mathscr{I} m(\rho)}}{\rho(\rho-n)} - \sum_\rho \frac{r_\rho(x)}{\rho}$$

et l'on a :

$$\left|\sum_\rho \frac{x^{i \mathscr{I} m(\rho)}}{\rho(\rho-n)}\right| \leqq \sum_\rho \frac{1}{|\rho|^2} = c.$$

Pour étudier $K_1(x)$, il nous faut d'abord étudier $\psi(x)-\theta(x)$.

LEMME 3. — *Si l'hypothèse de Riemann est vraie, le maximum de* $(\psi(x)-\theta(x)-x^{1/2})/x^{1/3}$ *est obtenu pour* $x=(283)^2$ *et vaut* 1,332 . . . *Pour* $x \geqq 121$, $\psi(x)-\theta(x) > \sqrt{x}$.

Démonstration. — Posons $g(x) = (\psi(x)-\theta(x)-x^{1/2})/x^{1/3}$.

On vérifie à l'ordinateur que $g(x) < 1{,}332\ldots$ pour $x \leqq 10^{11}$ ce qui nécessite uniquement l'utilisation des nombres premiers $\leqq 316\,229$.

Comme $\psi(x) = \sum_{n \geqq 1} \theta(x^{1/n})$; $\psi(x^{1/2}) = \sum_{n \geqq 1} \theta(x^{1/2n})$ on a :

$$\psi(x) - 2\psi(x^{1/2}) = \sum_{n \geqq 1} (-1)^n \theta(x^{1/n})$$

(*) soit $\psi(x)-\theta(x) \leqq \psi(x^{1/2}) + (\psi(x^{1/2})-\theta(x^{1/2})) + \theta(x^{1/3}) - \theta(x^{1/4}) + \theta(x^{1/6})$.

(*a*) Pour $10^{11} \leqq x \leqq 10^{22}$ on écrit :

$$\psi(x)-\theta(x) \leqq \theta(x^{1/2}) + 2(\psi(x^{1/2})-\theta(x^{1/2})) + \theta(x^{1/3})$$

$$\leqq x^{1/2} + x^{1/3}\left(1+\frac{2}{x^{1/2}}+\frac{2{,}666}{x^{1/6}}\right) \quad \text{d'après (4)}$$

$$\leqq x^{1/2} + x^{1/3} \times 1{,}282.$$

(*b*) Pour $10^{22} \leqq x \leqq 36.10^{22}$.

On utilise le résultat suivant que l'on déduit de la formule 6.9 de [SCH], p. 338 : pour

$$y \geqq 10^{11}, \qquad \psi(y) < y + \frac{\sqrt{y}\log^2 y}{8\pi}\left(1 - \frac{3{,}975}{\log y}\right).$$

On applique ce résultat dans (*) à $\psi(x^{1/2})$ et l'on majore $\psi(x^{1/2}) - \theta(x^{1/2})$ en tenant compte de (2) et de (4).

$$\psi(x) - \theta(x) \leqq x^{1/2} + x^{1/3}\left(1 + \frac{0{,}853\,5}{32\pi}\frac{\log^2 x}{x^{1/12}} + \frac{1}{x^{2/15}} + \frac{3}{x^{1/6}}\right),$$
$$\psi(x) - \theta(x) \leqq x^{1/2} + 1{,}322\, x^{1/3}.$$

(*c*) Pour $x \geqq 36.10^{22}$, on utilise (2), (3) et (7).

$$\psi(x) - \theta(x) \leqq x^{1/2} + x^{1/3}\left(1 + \frac{\log^2 x}{32\pi x^{1/12}} + \frac{1{,}000\,1}{x^{2/15}} + \frac{3}{x^{1/6}}\right),$$
$$\psi(x) - \theta(x) \leqq x^{1/2} + 1{,}320\, x^{1/3}.$$

La deuxième inégalité du Lemme est vraie pour $x < 10^{16}$ d'après (1). On a :

$$\psi(x) - \theta(x) > \theta(x^{1/2}) + \theta(x^{1/3}).$$

Si $x \geqq 10^{16}$, $x^{1/3} \geqq 599$, alors d'après (6) :

$$\psi(x) - \theta(x) > x^{1/2} + x^{1/3}\left(1 - \frac{1}{32\pi}\frac{\log^2 x}{x^{1/12}} - \frac{1}{72\pi}\frac{\log^2 x}{x^{1/6}}\right).$$

L'expression dans la parenthèse croit si $x \geqq e^{24}$,

Par suite si $x > 10^{16}$:

$$\psi(x) - \theta(x) > x^{1/2} + 0{,}36\, x^{1/3} > x^{1/2}.$$

LEMME 4. — *Pour $x \geqq 2$ et si l'hypothèse de Riemann est vraie :*

$$-L_1(x) = -\int_x^\infty S(t)\frac{\log t + 1}{(t\log t)^2}dt \leqq \frac{1}{\sqrt{x}\log x} \times \left(2 + c + \frac{c-2}{\log x} + \frac{8+4c}{\log^2 x} + \frac{2}{x^{1/6}} + \frac{\log 2\pi}{x^{1/2}}\right).$$

Démonstration. — Avec les notations du Lemme 1 et le résultat du Lemme 3, on a :

$$K_1(x) \leqq F_{1/2,\,1} + 1{,}333\, F_{1/3,\,1},$$

avec :

$$F_{1/2,\,1} \leqq \frac{2}{\sqrt{x}\log x} - \frac{2}{\sqrt{x}\log^2 x} + \frac{8}{\sqrt{x}\log^3 x}$$

et :

$$F_{1/3,\,1} \leqq \frac{3}{2x^{2/3}\log x}.$$

Par suite :

$$K_1(x) \leqq \frac{2}{\sqrt{x}\log x}\left(1 - \frac{1}{\log x} + \frac{4}{\log^2 x} + \frac{1}{x^{1/6}}\right).$$

Le lemme est alors conséquence du lemme 2 puisque $-L_1(x) = K_1(x) - J_1(x)$.

LEMME 5. — *Pour* $x \geqq 20\,000$:

$$\prod_{p \leqq x}\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \leqq e^{\gamma}\log\theta(x)\exp\left(\frac{2+c}{\sqrt{x}\log x} + \frac{\alpha(x)}{\sqrt{x}\log^2 x}\right),$$

avec :

$$\alpha(x) = \frac{S^2(x)(\log x + 1{,}31)}{2x^{3/2}} + (c-2) + \frac{8+4c}{\log x} + \frac{2\log x}{x^{1/6}} + \frac{\log 2\pi\log x}{x^{1/2}}.$$

Démonstration. — La formule de Taylor appliquée à la fonction $x \to \log\log x$ donne :

$$\log\log\theta(x) = \log\log x + \frac{S(x)}{x\log x} - \frac{S^2(x)}{2}g(\xi)$$

ou :

$$g(x) = \frac{\log x + 1}{x^2\log^2 x}$$

et ξ est compris entre x et $\theta(x)$. Comme $x \geqq 20\,000$, la relation (7) montre que :

$$\xi > x\left(1 - \frac{1}{8\log x}\right)$$

et comme g est décroissante on a :

$$g(\xi) < \frac{\log x + 1 - 1/(8\log x)}{x^2(1 - 1/(8\log x))^2\log^2(x(1 - 1/(8\log x)))};$$

or :

$$\log^2\left(x\left(1 - \frac{1}{8\log x}\right)\right) > \left(\log x - \frac{1}{\log x - 1}\right)^2 > \log^2 x\left(1 - \frac{1}{7{,}8\log^2 x}\right)^2$$

il vient donc :

$$g(\xi) < \left(\log x + 1{,}26 + \frac{0{,}44}{\log x}\right) \Big/ x^2 \log^2 x < \frac{\log x + 1{,}31}{x^2 \log^2 x}$$

et :

$$\log \log \theta(x) \geqq \log \log x + \frac{S(x)}{x \log x} - \frac{S^2(x)}{2} \frac{\log x + 1{,}31}{x^2 \log^2 x}.$$

D'après (9), on a :

$$\sum_{p \leqq x} \frac{1}{p} \leqq \log \log \theta(x) + B_1 + \frac{S^2(x)}{2} \frac{\log x + 1{,}31}{x^2 \log^2 x} - L_1(x)$$

et d'après (10) :

$$-\sum_{p \leqq x} \log\left(1 - \frac{1}{p}\right) \leqq \log \log \theta(x) + \gamma + \frac{S^2(x)}{2} \frac{\log x + 1{,}31}{x^2 \log^2 x} - L_1(x),$$

d'où le résultat d'après le lemme 4.

Majoration de $\prod_{x_2 < p \leqq x} (1 - (1/p^2))$. — En tenant compte de $x_2 < \sqrt{2x}$ (lemme § 2), cette majoration est conséquence du lemme suivant :

LEMME 6. — *On a pour* $x \geqq 20\,000$:

$$\prod_{\sqrt{2x} < p \leqq x} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \leqq \exp\left(\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{x} \log x} + \frac{4}{\sqrt{x} \log^2 x}\right).$$

Remarque. — Dans le développement asymptotique du produit, le 4 est remplacé par $\sqrt{2}(\log 2 + 2) = 3{,}808 \ldots$

Démonstration. — (*a*) Si $2.10^4 \leqq x \leqq 4.10^9$, on écrit :

$$\prod_{\sqrt{2x} < p \leqq x} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = \frac{6}{\pi^2} \prod_{p \leqq \sqrt{2x}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-1} \prod_{p > x} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-1}.$$

Un calcul sur ordinateur montre que, pour $x < 4.10^9$:

$$\frac{6}{\pi^2} \prod_{p \leqq \sqrt{2x}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-1} \leqq \exp\left(\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{x} \log x} + \frac{3{,}7}{\sqrt{x} \log^2 x}\right).$$

On a ensuite :

$$\prod_{p > x} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-1} = \exp\left(-\sum_{p > x} \log\left(1 - \frac{1}{p^2}\right)\right)$$

$$\leqq \exp\left(\sum_{p > x} \frac{1}{p^2 - 1}\right) \leqq \exp\left((1 + 2{,}6 10^{-9}) \sum_{p > x} \frac{1}{p^2}\right).$$

Or :

$$\sum_{p>x}\frac{1}{p^2}=\frac{-\theta(x)}{x^2\log x}+\int_x^{\infty}\theta(t)\frac{2\log t+1}{t^3\log^2 t}dt,$$

et, en utilisant (5) et (3) :

$$\sum_{p>x}\frac{1}{p^2}\leqq\frac{1{,}000\,2}{x\log x}+\frac{1}{8x\log^2 x}\leqq\frac{0{,}070\,9}{\sqrt{x}\log^2 x}.$$

Donc :

$$\prod_{\sqrt{2x}<p\leqq x}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\leqq\exp\left(\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}\log x}+\frac{3{,}771}{\sqrt{x}\log^2 x}\right).$$

(*b*) Si $x>4.10^9$ on a :

$$A=-\log\left(\prod_{x_2<p\leqq x}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\right)\geqq\sum_{\sqrt{2x}<p\in x}\frac{1}{p^2},$$

$$A\geqq\int_{\sqrt{2x}}^{x}\frac{d\theta(t)}{t^2\log t}=\int_{\sqrt{2x}}^{x}\frac{dt}{t^2\log t}+\int_{\sqrt{2x}}^{x}\frac{d\,S(t)}{t^2\log t}.$$

Par intégration par parties :

$$I_1=\int_{\sqrt{2x}}^{x}\frac{dt}{t^2\log t}=-\frac{1}{t\log t}\Big]_{\sqrt{2x}}^{x}+\frac{1}{t\log^2 t}\Big]_{\sqrt{2x}}^{x}+2\int_{\sqrt{2x}}^{x}\frac{dt}{t^2\log^3 t},$$

$$I_1\geqq\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}\log 2x}-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x}\log^2 2x}-\frac{1}{x\log x},$$

$$I_1\geqq\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}\log x}-\frac{\sqrt{2}(2+\log 2)}{\sqrt{x}\log^2 x}.$$

Par ailleurs :

$$I_2=\int_{\sqrt{2x}}^{x}\frac{dS(t)}{t^2\log t}=\frac{S(x)}{x^2\log x}-\frac{S(\sqrt{2x})}{x\log 2x}+\int_{\sqrt{2x}}^{x}S(t)\frac{2\log t+1}{t^3\log^2 t}dt,$$

soit :

$$I_2\geqq\frac{S(x)}{x^2\log x}-\frac{S(\sqrt{2x})}{x\log 2x}+L_2(\sqrt{2x})-L_2(x),$$

où :

$$L_2(y)=\int_y^{\infty}S(t)\frac{2\log t+1}{t^3\log^2 t}\,dt=J_2(y)-K_2(y)$$

avec :

$$K_2(y)=\int_y^{\infty}(\psi(t)-\theta(t))\frac{2\log t+1}{t^3\log^2 t}dt.$$

D'après le lemme 3 :

$$F_{1/2,2}(y) \leqq K_2(y) \leqq F_{1/2,2}(y) + 1{,}333\, F_{1/3,2}(y)$$

et d'après le lemme 1 :

$$F_{1/2,2}(y) = \frac{4}{3\, y^{3/2} \log y} - \frac{2}{9}\left(\frac{1}{y^{3/2} \log^2 y} - 2\int_y^\infty \frac{t^{-5/2}}{(\log t)^3}\, dt\right),$$

donc :

$$\frac{4}{3}\,\frac{y^{-3/2}}{\log y} - \frac{2}{9}\,\frac{y^{-3/2}}{\log^2 y} < F_{1/2,2}(y) < \frac{4}{3}\,\frac{y^{-3/2}}{\log y}$$

et de même :

$$F_{1/3,2}(y) < \frac{6}{5}\,\frac{y^{-3/2}}{\log y} \times \frac{1}{y^{1/6}}.$$

D'après le lemme 2 :

$$L_2(y) \leqq \frac{1}{y^{3/2} \log y}\left(2c + \frac{c+2/9}{\log y} + \frac{4c}{3 \log^2 y} - \frac{4}{3}\right) \leqq 0 \qquad \text{pour} \quad y \geqq 2.$$

D'autre part :

$$L_2(\sqrt{2x}) \geqq J_2(\sqrt{2x}) - F_{1/2,2}(\sqrt{2x}) - 1{,}333\, F_{1/3,2}(\sqrt{2x}).$$

Soit :

$$L_2(\sqrt{2x}) > \frac{-1{,}676}{(2x)^{3/4} \log \sqrt{2x}} \qquad \text{pour} \quad x > 4 \,.\, 10^9.$$

Si $4\,.\,10^9 < x < 0{,}5 10^{22}$, $\sqrt{2x} < 10^{11}$ donc $S(\sqrt{2x}) < 0$ et :

$$|S(x)| < 0{,}0078\, \frac{x}{\log x} \text{ ([SCH], p. 357).}$$

Par suite :

$$I_2 \geqq -\frac{0{,}0078}{x \log^2 x} - \frac{1{,}676}{(2x)^{3/4} \log \sqrt{2x}} = -\frac{1}{\sqrt{x} \log^2 x}\left(\frac{0{,}0078}{\sqrt{x}} + \frac{1{,}676 \times 2^{1/4} \log^2 x}{x^{1/4} \log 2x}\right)$$

$$I_2 \geqq \frac{-0{,}17}{\sqrt{x} \log^2 x}.$$

Si $x > 0{,}5\,.\,10^{22}$:

$$I_2 \geqq -\frac{1}{\sqrt{x} \log^2 x}\left(\frac{\log^3 x}{8\pi x} + \frac{2^{1/4}}{32\pi}\,\frac{1}{x^{1/4}} \log 2x \log^2 x + \frac{1{,}676\, 2^{1/4} \log^2 x}{x^{1/4} \log 2x}\right)$$

$$I_2 \geqq -\frac{0{,}006}{\sqrt{x} \log^2 x}$$

d'où :

$$A \geqq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}\log x} - \frac{4}{\sqrt{x}\log^2 x}.$$

Minoration de log log N. — On a d'abord

LEMME 7. — *Pour* $x \geqq 20\,000$, $\sum_{i \geqq 2} \theta(x_i) \geqq 0{,}998\, x_2$.

Démonstration. — Considérons le tableau (p. 212) où les deux premières lignes sont extraites de ([ROS 1], p. 171) et ([ROS 2], p. 265) et signifient :

$$\forall x \geqq a, \qquad \theta(x) > \alpha x.$$

Si $A(x_2) = \theta(x_2) + \sum_{i \geqq 3} \theta(x_i)$, on peut écrire compte tenu du lemme du paragraphe 2 :

$$A(x_2) \geqq \theta(x_2) + \sum_{i \geqq 3} \theta\left(\left(\frac{x_2^2}{2}\right)^{1/i}\right).$$

Pour deux éléments successifs a' et $a\,(a' > a)$ de la première ligne, on définit β par :

$$\beta a' = \alpha a' + \sum_{3 \leqq i \leqq i_0} \theta\left(\left(\frac{a^2}{2}\right)^{1/i}\right), \; i_0 \geqq 3.$$

Ceci entraîne que $\forall y$ tel que $a \leqq y \leqq a'$, $A(y) \geqq \beta y$.

LEMME 8. — *Pour* $x \geqq 20\,000$ *on a :*

$$\log\log N > \log\theta(x) \exp\left(\frac{0{,}968\sqrt{2}}{\sqrt{x}\log x} - \frac{0{,}342}{\sqrt{x}\log^2 x}\right)$$

Démonstration. — D'après le lemme précédent, $\log N > \theta(x) + 0{,}998\, x_2$ soit $\log N > \theta(x)$ $(1 + 0{,}9979\, x_2/x)$ d'après (3).

Par suite :

$$\log\log N > \log\theta(x) + \frac{0{,}9979\, x_2/x}{1 + 0{,}9979\, x_2/x}$$

soit $\log\log N > \log\theta(x) + 0{,}998\, x_2/x$ pour $x \geqq 20\,000$:

$$\log\log N > \log\theta(x)\left(1 + \frac{0{,}998\, x_2}{x\log\theta(x)}\right) > \log\theta(x)\left(1 + \frac{0{,}987\, x_2}{x\log x}\right),$$

d'après (3) :

$$\log\log N > \log\theta(x)\exp\left(\frac{0{,}987\, x_2}{x\log x} \times \frac{1}{1 + 10^{-3}}\right) > \log\theta(x)\exp\left(\frac{0{,}986\, x_2}{x\log x}\right).$$

On termine en appliquant le lemme du paragraphe 2.

PROPOSITION 3. — *Si l'hypothèse de Riemann est vraie, on a :*

$$\forall n \geqq 5\,041, \qquad \sigma(n) < e^{\gamma} n \log \log n.$$

Remarque. — Les nombres pour lesquels $\sigma(n) > e^{\gamma} n \log \log n$ sont :
2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 16, 18, 20, 24, 30, 36, 48, 60, 72, 84, 120, 180, 240, 360, 720, 840, 2 520 et 5 040.

Démonstration. — Nous avons vu que pour N colossalement abondant :

$$\frac{\sigma(\mathrm{N})}{\mathrm{N} \log \log \mathrm{N}} \leqq \prod_{x_2 < p \leqq x} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \prod_{p \leqq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} (\log \log \mathrm{N})^{-1}$$

D'après les lemmes 5, 6 et 8 il faut vérifier que :

$$\beta(x) = \frac{\alpha(x) + 4{,}342}{\log x} < 0{,}762\,4.$$

(*a*) Pour $x \geqq 100.000$, on utilise (6) pour majorer $\mathrm{S}(x)$ dans $\alpha(x)$ ainsi : $\alpha(x) \leqq 3{,}335$ d'où $\beta(x) < 0{,}67$.

(*b*) Pour $20\,000 \leqq x \leqq 100.000$, on utilise (5) pour majorer $\mathrm{S}(x)$ ainsi $\alpha(x) \leqq 3{,}043$ d'où $\beta(x) < 0{,}746$.

(*c*) Pour $x \leqq 20\,000$, on calcule tous les nombres C_k colossalement abondants, dont le plus grand facteur premier est inférieur à x (il y en a 2 347). On constate que $f(\mathrm{C}_k) < e^{\gamma}$ pour $\mathrm{C}_k \geqq 55\,440$, ce qui, avec la proposition 1, démontre le résultat pour tout $n \geqq 55\,440$. On calcule ensuite $f(n)$ pour $n \leqq 55\,440$, ce qui permet de conclure.

4. Comportement de $\sigma(n)$ si l'hypothèse de Riemann n'est pas vraie

Si l'hypothèse de Riemann n'est pas vraie, J. L. Nicolas ([NIC 2], th. 3) a démontré, en utilisant le théorème de Landau ([ELL], [GRO 1], [GRO 2]) que :

$$\log\left(e^{\gamma} \log(\theta(x)) \prod_{p \leqq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right)\right) = \Omega_{\pm}(x^{-b})$$

b étant un nombre quelconque de l'intervalle $]1 - \theta, 1/2[$, θ étant la borne supérieure des parties réelles des zéros de la fonction ζ de Riemann.

Ce résultat nous permet de démontrer la proposition suivante, qui achève la démonstration du théorème 1.

PROPOSITION. — *Si H.R. n'est pas vraie, alors pour les nombres colossalement abondants, on a :*

$$\frac{\sigma(n)}{n \log \log n} = e^{\gamma}(1 + \Omega_{\pm}((\log n)^{-b})).$$

Démonstration. — Si n est colossalement abondant, alors d'après le paragraphe 2, on peut écrire :

$$\frac{\sigma(n)}{n}=\prod_{p\leqq x}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\prod_{k\geqq 1}\prod_{x_{k+1}<p\leqq x_k}\left(1-\frac{1}{p^{k+1}}\right)$$

et $x_{k+1}>x^{1/k+1}$.

Donc :

$$\sigma(n)\, n=\prod_{p\leqq x}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\prod_{x_2<p\leqq x}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\mathrm{N}(x)$$

où :

$$\prod_{x_3<p\leqq x_2}\left(1-\frac{1}{p^3}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\Pi(x_3)}<\mathrm{N}(x)<1,$$

soit :

$$\mathrm{N}(x)=1+0\left(\frac{1}{\sqrt{x}\log^2 x}\right).$$

Donc :

$$\frac{\sigma(n)}{n\log\log n}=\exp\left(\frac{-2\sqrt{2}}{\sqrt{x}\log x}+0\left(\frac{1}{\sqrt{x}\log^2 x}\right)\right)\frac{\prod_{p\leqq x}(1-(1/p))^{-1}}{\log\theta(x)}.$$

D'après le résultat rappelé ci-dessus :

$$\frac{\sigma(n)}{n\log\log n}=\frac{e^\gamma}{1+\Omega_\pm(x^{-b})}=e^\gamma(1+\Omega_\pm(\log n)^{-b}).$$

Le théorème 2 se démontre en utilisant les deux lemmes suivants qui améliorent légèrement des résultats de [ROS 1].

LEMME 1. — *Pour* $x\geqq 10^8$:

$$\left|\sum_{p\leqq x}\frac{1}{p}-\log\log x-\mathrm{B}_1\right|<\frac{0{,}198}{\log^2 x}.$$

Démonstration. — On reprend la démonstration du lemme 13, p. 86 de [ROS 1], en utilisant la majoration :

$$|\theta(x)-x|<0{,}008\, x/\log x \quad \text{([SCH], p. 357).}$$

LEMME 2. — *Pour* $x\geqq 10^4$:

$$\prod_{p\leqq x}\left(\frac{p}{p-1}\right)\leqq e^\gamma\log x\left(1+\frac{0{,}2}{\log^2 x}\right).$$

Démonstration. — Pour $10^4 \leqq x \leqq 10^8$, on utilise le théorème 23, p. 73, de [ROS 1] :

$$\prod_{p \leqq x} \left(\frac{p}{p-1}\right) \leqq e^\gamma \log x \left(1 + \frac{2}{\sqrt{x} \log x}\right).$$

Pour $x \geqq 10^8$ on utilise la formule (10) avec le lemme 1.

Démonstration du théorème 2. — Soit $N_k = \prod_{i=1}^{k} p_k$ et supposons $p_k \geqq 20\,000$ $(k \geqq k_1)$. On a, d'après (5) :

$$\log N_k = \theta(p_k) > p_k \left(1 - \frac{1}{8 \log p_k}\right),$$

d'où :

$$\log \log N_k > \log p_k - \frac{0{,}123\,5}{\log p_k}.$$

La fonction $t \to e^\gamma t + 0{,}6/t$ étant croissante pour $t \geqq 1$, on peut écrire :

$$e^\gamma \log \log N_k + \frac{0{,}6}{\log \log N_k} > e^\gamma \left(\log p_k - \frac{0{,}123\,5}{\log p_k}\right) + \frac{0{,}6}{\log p_k}$$

$$> e^\gamma \log p_k \left(1 + \frac{0{,}2}{\log p_k}\right) > \prod_{p \leqq p_k} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1},$$

d'après le lemme 2; d'où :

$$e^\gamma \log \log N_k + \frac{0{,}6}{\log \log N_k} > \frac{N_k}{\varphi(N_k)}.$$

Par suite, si, $N_k \leqq n < N_{k+1}$, avec $p_k \geqq 20\,000$, on a :

$$\frac{\sigma(n)}{n} < \frac{n}{\varphi(n)} \leqq \frac{N_k}{\varphi(N_k)} < e^\gamma \log \log N_k + \frac{0{,}6}{\log \log N_k} < e^\gamma \log \log n + \frac{0{,}6}{\log \log n}.$$

Si $n \leqq N_{k_1}$, on utilise les résultats calculés à l'ordinateur lors de la proposition 3 du paragraphe 3. On a $\sigma(n)/n < e^\gamma \log \log n$ sauf pour 27 valeurs pour lesquelles on termine le calcul à la main.

Remarque. — On aurait pu démontrer que la fonction :

$$g : n \mapsto \left(\frac{\sigma(n)}{n} - e^\gamma \log \log n\right) \log \log n$$

atteint son maximum sur un nombre colossalement abondant puis raisonner uniquement sur ces nombres, comme dans [ROB 1], pour la fonction $d(n)$ nombre de diviseurs de n.

5. Estimation de $\sum_{p \leqq x} 1/p$ et $\prod_{p \leqq x} (1-(1/p))$ si l'hypothèse de Riemann est vraie.

Posons :

$$\mathrm{A}(x)=\sum_{p \leqq x} \frac{1}{p}-\log \log x-\mathrm{B}_1$$

et :

$$\mathrm{B}(x)=e^\gamma \prod_{p \leqq x}\left(1-\frac{1}{p}\right) \log x-1.$$

La formule (8) du paragraphe 3 montre que :

$$\mathrm{A}(x)=\frac{\mathrm{S}(x)}{x \log x}-\mathrm{L}_1(x),$$

Schoënfeld ([SCH]) majore :

$$\mathrm{L}_1(x)=\int_x^{\infty} \mathrm{R}(t) \frac{\log t+1}{t \log t}$$

en majorant $\mathrm{R}(t)$ sous le signe d'intégration et obtient :

$$\mathrm{L}_1(x)=0\left(\frac{\log x}{\sqrt{x}}\right),$$

tandis que l'utilisation de la formule explicite nous a permis au paragraphe 3 d'obtenir :

$$\mathrm{L}_1(x)=0\left(\frac{1}{\sqrt{x} \log x}\right).$$

1° Pour $1<x \leqq 10^8$, on a, d'après [ROS 1], p. 72 :

$$0<\mathrm{A}(x)<\frac{2}{\sqrt{x} \log x}.$$

Par suite :

$$\mathrm{A}(x)<\frac{\log x}{8 \pi \sqrt{x}} \quad \text { si } \quad x \geqq 1200.$$

Pour $x \leqq 1200$ on regarde à l'ordinateur sur les nombres premiers.

2° Supposons $x \geqq 10^8$; on utilise le fait que $\mathrm{L}_1(x)<0$ pour $x \geqq 2$ en effet, $\mathrm{K}_1(x) \geqq \mathrm{F}_{1/2,1}(x)$ et :

$$-\mathrm{L}_1(x)=-\mathrm{J}_1(x)+\mathrm{K}_1(x) \geqq-\frac{c}{\sqrt{x} \log x}\left(1+\frac{1}{\log x}+\frac{4}{\log ^2 x}\right)+\frac{2}{\sqrt{x} \log x}-\frac{2}{\sqrt{x} \log ^2 x},$$

d'après les lemmes 1, 2 et 3 du paragraphe 3.

Par suite :

$$A(x) > \frac{S(x)}{x \log x} > -\frac{1}{8\pi}\frac{\log x}{\sqrt{x}}$$

par (6), ce qui termine la démonstration de (a) du théorème 3.

3° Pour la démonstration de (b) on utilise :

$$\psi(x) < x + \frac{\sqrt{x}\log^2 x}{8\pi}\left(1 - \frac{2{,}626\,82}{\log x}\right)$$

valable pour $x \geqq 10^8$ et dont la démonstration est analogue à celle du (c) du lemme 3, paragraphe 3.

Par suite :

$$A(x) \leqq \frac{\log x}{8\pi\sqrt{x}}\left(1 - \frac{2{,}626\,82}{\log x}\right) - L_1(x),$$

$$\leqq \frac{\log x}{8\pi\sqrt{x}}\left(1 - \frac{0{,}059}{\log x}\right) \quad \text{si} \quad x \geqq 5.10^8,$$

d'après le lemme 4 du paragraphe 3.

Il reste à étudier l'intervalle $[10^8, 5.10^8]$ dans lequel $\theta(x) < x$ alors :

$$A(x) - A(10^8) = \sum_{10^8 < p \leqq x} \frac{1}{p} - \log\log x + \log\log 10^8$$

$$= \int_{10^8}^{x} \frac{d\theta(t)}{t \log t} - \log\log x + \log\log 10^8$$

$$= \frac{S(x)}{x \log x} - \frac{S(10^8)}{10^8 \log 10^8} + \int_{10^8}^{x} S(t)\frac{\log t + 1}{t^2 \log^2 t}\,dt,$$

d'où :

$$A(x) < A(10^8) - \frac{S(10^8)}{10^8 \log 10^8} < \frac{2}{\sqrt{10^8}\log 10^8} + \frac{0{,}007\,8}{(\log 10^8)^2},$$

d'après [SCH], p. 360, d'où $A(x) < 3{,}38.10^{-5}$, soit :

$$A(x) < \frac{\log x - 1}{8\pi\sqrt{x}} \quad \text{pour} \quad 10^8 \leqq x \leqq 5.10^8.$$

4° Pour $0 < x < 10^8$ on a d'après [ROS 1], p. 73 :

$$\frac{-2}{\sqrt{x}\log x} < B(x) < 0.$$

Par suite :

$$\mathrm{B}(x) > -\frac{\log x}{8\pi\sqrt{x}} \qquad \text{si} \quad x > 1200.$$

Pour $x \leqq 1200$, on utilise l'ordinateur.

5° Supposons $x \geqq 10^8$.

D'après la formule (10) du paragraphe 3, on a :

$$\mathrm{B}(x) = \exp(-\mathrm{A}(x) - \Sigma) - 1,$$

avec :

$$-\frac{1}{x-1} < \Sigma = \sum_{p>x} \left(\log\left(1-\frac{1}{p}\right) + \frac{1}{p}\right) < 0.$$

Par suite :

$$\mathrm{B}(x) > \exp(-\mathrm{A}(x) - \Sigma) - 1 > -\mathrm{A}(x) \geqq -\frac{\log x}{8\pi\sqrt{x}},$$

ce qui démontre (*c*).

Pour démontrer (*d*), on utilise :

$$-\mathrm{A}(x) \geqq \frac{-\mathrm{S}(x)}{x \log x}, \qquad \exp u \leqq 1 + u + \frac{u^2}{2(1-u)} \quad (u > 0)$$

et une majoration de $\mathrm{S}(x)$.

Pour $10^8 < x < 23 \,.\, 10^8$, on prend $\mathrm{S}(x) < 0{,}0078\, x/\log x$ ([SCH], p. 357 et 360) donc :

$$\mathrm{B}(x) \leqq u + \frac{u^2}{2(1+u)} \qquad \text{avec} \quad u = 0{,}0078 \frac{x}{\log x} + \frac{1}{x-1}.$$

Pour $x \geqq 23 \,.\, 10^8$, on prend :

$$\mathrm{S}(x) < \frac{\sqrt{x}}{8\pi} \log x \,(\log x - 2)$$

([SCH], p. 337) et l'on a ici :

$$u = \frac{1}{8\pi} \frac{\log x - 2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x-1}.$$

Dans les deux cas, on montre facilement que :

$$\mathrm{B}(x) < \frac{1}{8\pi} \frac{\log x}{\sqrt{x}},$$

ce qui termine la démonstration du théorème 3.

6. Compléments

Nous considérons dans ce paragraphe quelques fonctions voisines de la fonction somme des diviseurs.

(*a*) Soit σ^* la fonction somme des diviseurs unitaires;

$$\sigma^*(n) = \sum_{\substack{d/n \\ (d,n/d)=1}} 1.$$

C'est une fonction multiplicative et $\sigma^*(p^\alpha) = 1 + p^\alpha$. Le lemme suivant précise son ordre maximum.

LEMME. — *On a :*

$$\overline{\lim}\, \frac{\sigma^*(n)}{n \log\log n} = \frac{6\, e^\gamma}{\pi^2} = 1{,}08\ldots$$

$$\overline{\lim}\, \frac{\sigma(n)}{\sigma^*(n) \log\log n} = e^\gamma.$$

La démonstration est très voisine de celle de l'ordre maximum de $\sigma(n)/n$ ou de $n/\varphi(n)$ ([HAR], ch. XVIII). On peut préciser ce lemme par la proposition suivante dont la démonstration se déduit des résultats du paragraphe 4.

PROPOSITION 1

(i) *Il existe une infinité de* n *tels que :*

$$\sigma^*(n) > \frac{6\, e^\gamma}{\pi^2} n \log\log n.$$

(ii) *Pour* n *assez grand :*

$$\frac{\sigma(n)}{\sigma^*(n) \log\log n} < e^\gamma.$$

IVIC ([IVI]) a montré :

Pour $n \geqq 7$, $\sigma(n) < 2{,}59\, n \log\log n$.

Pour $n \geqq 31$, $\sigma^*(n) < 28/15\, n \log\log n = 1{,}86\ldots n \log\log n$.

Nous améliorons ses résultats :

PROPOSITION 2

$$\text{(1)} \qquad \frac{\sigma(n)}{n \log\log n} \leqq \frac{\sigma(12)}{12 \log\log 12} = 2{,}5634\ldots \qquad \textit{pour} \quad n \geqq 7.$$

Le maximum absolu de $\sigma(n)/n \log\log n$ *est obtenu pour* $n=3$ *et vaut* $14{,}18\ldots$:

$$\text{(2)} \qquad \frac{\sigma^*(n)}{n \log\log n} \leqq 1{,}63601\, n \log\log n \qquad \textit{pour} \quad n \geqq 31,$$

sauf pour $n=42$ *où* $\sigma^*(n) = 1{,}7336\ldots n \log\log n$.

Le maximum absolu de $\sigma^*(n)/n \log\log n$ *est obtenu pour* $n=3$ *et vaut* 14,18 . . .

Démonstration. — 1° L'inégalité sur σ est conséquence du théorème 2 mais on peut l'obtenir à partir de la majoration de [ROS 1, p. 62] :

$$\frac{\sigma(n)}{n} < \frac{n}{\varphi(n)} < e^{\gamma} \log\log n + \frac{2{,}507}{\log\log n},$$

qui prouve le résultat pour $n \geqq 400$ et on termine à la main pour $n \leqq 400$.

2° Il suffit de vérifier l'inégalité sur les nombres $N_k = \prod_{i=1}^{k} p_i$.

En effet, si $N_k \leqq n < N_{k+1}$ on a :

$$\frac{\sigma^*(n)}{n \log\log n} \leqq \frac{\sigma^*(N_k)}{N_k \log\log N_k}.$$

En utilisant les deux inégalités de ([ROS 1], p. 70) :

$$\theta(x) > x\left(1 - \frac{1}{\log x}\right) \qquad \text{pour} \quad x \geqq 41,$$

$$\sum_{p \leqq x} \frac{1}{p} < \log\log x + B_1 + \frac{1}{\log^2 x} \qquad \text{pour} \quad x \geqq 1,$$

on obtient :

$$\prod_{p \leqq x}\left(1 + \frac{1}{p}\right) \leqq \exp\left(\sum_{p \leqq x} \frac{1}{p}\right) \leqq 1{,}4 \log x \qquad \text{pour} \quad x \geqq 41,$$

et $\log \theta(x) > 0{,}9 \log x$ pour $x \geqq 41$.

Donc, pour $p_k \geqq 41$, soit $k \geqq 13$, $\sigma^*(N_k)/N_k \log\log N_k \leqq 1{,}56$.

Il reste à étudier les nombres N_k pour $4 \leqq k \leqq 12$ et les nombres n tels que $N_3 \leqq n < N_4 = 210$.

(*b*) Posons $\sigma_k(n) = \sum_{d/n} d^k$.

Compte tenu des résultats de [GRO], on peut énoncer :

$$\forall k > 1, \qquad \overline{\lim_{n \to \infty}}\ (\sigma_k(n)/n^k) = \zeta(k)$$

et il est immédiat que $\forall n$, $\sigma_k(n)/n^k < \zeta(k)$.

Si :

$$0 < k < 1, \qquad \overline{\lim_{n \to \infty}}\ \log(\sigma_k(n)/n^k) \log\log n/(\log n)^{1-k} = \frac{1}{1-k}$$

et on peut démontrer : il existe une infinité de n tels que :

$$\log(\sigma_k(n)/n^k) \log\log n/(\log n)^{1-k} > 1/(1-k).$$

Si $k=0$ on a :

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log d(n) \times \log \log n}{\log n} = \log 2$$

et il existe une infinité de n tels que :

$$\log d(n) > \log 2 . \log n / \log \log n \quad (cf. \text{ [ROB 1]}).$$

(*c*) D'autres fonctions de diviseurs peuvent aussi être considérées. Ainsi, J. L. Nicolas ([NIC 1]) et J. P. Massias ([MAS]) ont étudié la fonction l suivante :

$$l\left(\prod_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i}$$

et ont obtenu des résultats sur ses petites valeurs.

ANNEXE

<table>
<tr><td>a</td><td colspan="2">487381</td><td colspan="2">89387</td><td colspan="2">32057</td><td colspan="2">11927</td><td colspan="2">7481</td><td colspan="2">5381</td><td colspan="2">3457</td><td colspan="2">2657</td></tr>
<tr><td>α</td><td colspan="2">0,998</td><td colspan="2">0,995</td><td colspan="2">0,990</td><td colspan="2">0,985</td><td colspan="2">0,980</td><td colspan="2">0,975</td><td colspan="2">0,97</td><td colspan="2">0,965</td></tr>
<tr><td>β</td><td></td><td colspan="2">0,9983</td><td colspan="2">0,9983</td><td colspan="2">0,999</td><td colspan="2">1,003</td><td colspan="2">1,005</td><td colspan="2">1,001</td><td colspan="2">1,004</td><td></td></tr>
<tr><td>i_0</td><td></td><td colspan="2">3</td><td colspan="2">3</td><td colspan="2">4</td><td colspan="2">3</td><td colspan="2">3</td><td colspan="2">3</td><td colspan="2">3</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>a</td><td colspan="2">2657</td><td colspan="2">1481</td><td colspan="2">1427</td><td colspan="2">853</td><td colspan="2">809</td><td colspan="2">599</td><td colspan="2">557</td><td colspan="2">349</td><td colspan="2">227</td><td colspan="2">193</td></tr>
<tr><td>α</td><td colspan="2">0,965</td><td colspan="2">0,96</td><td colspan="2">0,95</td><td colspan="2">0,945</td><td colspan="2">0,94</td><td colspan="2">0,93</td><td colspan="2">0,92</td><td colspan="2">0,91</td><td colspan="2">0,89</td><td colspan="2">0,86</td></tr>
<tr><td>β</td><td></td><td colspan="2">1,004</td><td colspan="2">1,006</td><td colspan="2">1,001</td><td colspan="2">1,007</td><td colspan="2">1,005</td><td colspan="2">1,021</td><td colspan="2">1,003</td><td colspan="2">1,004</td><td colspan="2">1,002</td><td></td></tr>
<tr><td>i_0</td><td></td><td colspan="2">4</td><td colspan="2">4</td><td colspan="2">4</td><td colspan="2">3</td><td colspan="2">4</td><td colspan="2">4</td><td colspan="2">8</td><td colspan="2">6</td><td colspan="2">4</td><td></td></tr>
</table>

BIBLIOGRAPHIE

[ALA] L. ALAOGLU et P. ERDÖS, *On Highly Composite and Similar Numbers* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 56, 1944, p. 448-469).

[DAV] H. DAVENPORT, *Multiplicative Number Theory*, Springer Verlag, 1980.

[EDW] H. M. EDWARDS, *Riemann's Zeta Function*, Academic Press, New York and London, 1974.

[ELL] W. J. ELLISON et M. MENDES-FRANCE, *Les nombres premiers*, Hermann, Paris-75 (*Actualités scientifiques et industrielles*, n° 1366).

[ERD] P. ERDÖS et J. L. NICOLAS, *Répartition des nombres superabondants* (*Bull. Soc. Math. Fr.*, 103, 1975, p. 65-90).

[GRO] GRONWALL, *Some Asymptotic Expressions in the Theory of Numbers* (*Trans. American Math. Soc.*, 14, 1913, p. 113-122).

[GROS 1] E. GROSSWALD, *Oscillation Theorems of Arithmetical Functions* (*Trans. Am. Math. Soc.*, vol. 126, n° 1, 1967, p. 1-28).

[GROS 2] E. GROSSWALD, *Oscillation theorems* (*Lectures Notes in Math.*, n° 251, p. 141-167).

[HAR] G. H. HARDY et E. M. WRIGHT, *An Introduction to the Theory of Number*, *Oxford*, 1960.

[IVI] A. IVIC, *Two Inequalities for the Sum of Divisor Functions* (*Univ. u. Novom. Sadu. Zb. Rad. Prirod. Math.* Fak., 7, 1977, p. 17-22).

[LAN] S. LANG, *Introduction to transcendental numbers*, Addison Wesley, Pub. Comp., 1966.

[MAS] J. P. MASSIAS, *Majoration explicite de l'ordre maximum d'un élément du groupe symétrique* (*Comptes rendus des Journées de Théorie analytique des Nombres*, Valenciennes, 1981).

[NIC] J. L. NICOLAS, *Ordre maximal d'un élément du groupe des permutations et highly composite numbers* (*Bull. Soc. Math. Fr.*, 97, 1969, p. 129-191).

[NIC 2] J. L. NICOLAS, *Petites valeurs de la fonction d'Euler* (*Journal of Number Theory*, vol. 17, n° 3, 1983, p. 375-388).

[RAM] S. RAMANUJAN, *Highly Composite Numbers* (*Proc. London Math. Soc.*, Ser. 2, 14, 1915, p. 347-400; Collected papers, 78-128, Chelsea).

[ROB 1] G. ROBIN, *Majorations explicites du nombre de diviseurs d'un entier* (*Pub. Dept. Math. Limoges*, t. 2, 1981).

ROB 2] G. ROBIN, *Encadrements explicites pour le produit des k premiers nombres premiers* (*Comptes rendus des Journées de Théorie analytique et élémentaire des nombres*, Reims, 9-10 mars 1981, 8 pages).

[ROB 3] G. ROBIN, *Estimation de la fonction de Tchebycheff* θ *sur le k-ième nombre premier et grandes valeurs de la fonction* $\omega(n)$, *nombre de diviseurs premiers de n* (*Acta Arithmetica*, vol. 42, n° 4, 1982, p. 367-389).

[ROB 4] G. ROBIN, *Sur l'ordre maximum de la fonction somme des diviseurs* (*Séminaire Delange-Pisot-Poitou*, Paris, 1981-1982).

[ROS 1] J. B. ROSSER et L. SCHOENFELD, *Approximate Formulas for Some Functions of Prime Numbers* (*Illinois Jour. Math.*, 1962, t. 6, p. 64-94).

[ROS 2] J. B. ROSSER et L. SCHOENFELD, *Sharper Bounds for the Chebyshev Functions* $\theta(x)$ *and* $\psi(x)$ (*Math. of Comp.*, vol. 29, Numb. 129, 1975, p. 243-269).

[SCH] L. SCHOENFELD, *Sharper Bounds for the Chebyshev Functions* $\theta(x)$ *and* $\psi(x)$ II (*Math. of Comp.*, vol. 30, Numb. 134, 1976, p. 337-360).

(Manuscrit reçu en avril 1983.)

Guy ROBIN,
Université de Limoges,
Département de Mathématiques,
123, avenue Albert-Thomas,
78060 Limoges Cedex.